Prof. Hernández

Segundo Parcial de Análisis Matemático II

Fecha: 19/11/24 **Apellido y Nombre:**

Curso: Z2054 **Legajo:**

1. Halle la circulación de $\bar{f}(\bar{x}) = (-8xy; -\frac{z^2}{2}; x^2)$ a través de la curva intersección de las superficies $z = 4 - x^2 - y^2 \ \wedge \ z + 2x = 4$. Indique en un gráfico el sentido en que recorre la curva
2. Determine el área de la porción del plano $x = 2y$ limitada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
3. Calcule el flujo de $\bar{f}(\bar{x}) = (xy; xy^2; -2xyz)$ a través de superficie frontera del sólido $x^2 + z^2 \leq 9$; $0 \leq y \leq 2x$; $z \geq 0$. . Indique si el lujo es saliente o entrante al sólido
4. Calcule la circulación del campo $\bar{f}(x; y; z) = (2x; z; y - 2z)$ a lo largo de la curva dada por las intersecciones de las superficies $x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ z + x = 1$ desde (1; 0; 0) hasta (0; 1; 1). Verifique si la circulación es independiente del camino
5. a) Defina líneas de campo para un campo vectorial b) Halle la línea de campo de $\bar{f}(x; y) = (2; x)$ que pasa por (2;5)
6. a)Enuncie el teorema de Green indicando las hipótesis b)Si $\bar{f}(x; y) = (2y; x + y)$ Donde $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{g} = -6$ determine el área del recinto plano D que tiene como curva frontera a C

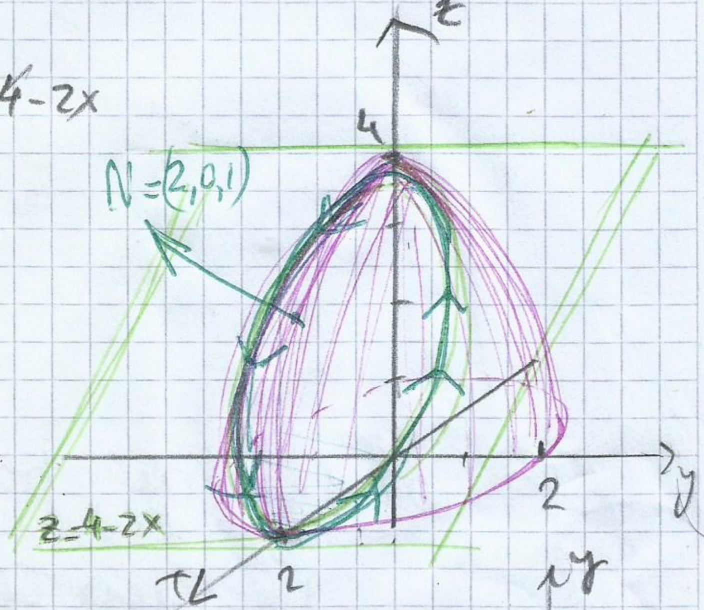
AM2	2° parcial Prof Hernandez	HOJA N° 1/3 FECHA 19-11-24

① Hallar la circ. de $\bar{f}(x,y) = \left(\overset{P}{-8xy}, \overset{Q}{\frac{-z^2}{2}}, \overset{R}{x^2}\right)$ a través de la curva intersección de las sup: $z = 4 - x^2 - y^2 \wedge z + 2x = 4$. Indicar, en un gráfico, el sentido en que recorre la curva

$$C: \begin{cases} \boxed{z = 4 - x^2 - y^2} \\ \boxed{z = 4 - 2x} \end{cases} > \cancel{4} - (x^2+y^2) = \cancel{4} - 2x$$

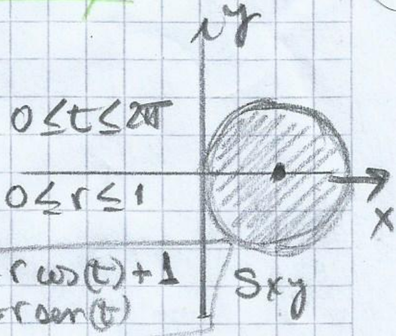
$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$C: \begin{cases} \boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1} \\ z = 4 - 2x \end{cases}$$



C es curva suave y cerrada frontera de S

S porción del plano $z = 4-2x$, orientable $\rightsquigarrow N = (2,0,1)$



$0 \le t \le 2\pi$

$0 \le r \le 1$

$\boxed{\begin{matrix} x = r\cos(t) + 1 \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{matrix}}$

$\bar{f} \in C^1$ (componentes polinómicas)

x T. Stokes $\Rightarrow \oint_C \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{f})\, d\bar{S}$

$\bar{f} = (P, Q, R) \Rightarrow \text{rot}(\bar{f}) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$

$= (0 - (-z), 0 - 2x, 0 - (-8x)) = (z, -2x, 8x)$

$\oint_C \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_S (z, -2x, 8x)\, d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} (z, -2x, 8x)(2,0,1)\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} 2z + 8x\, dx\,dy =$

$\overset{z = 4-2x}{\underset{\downarrow}{=}} \iint_{S_{xy}} 2(4-2x) + 8x\, dx\,dy = 4 \iint_{S_{xy}} 2 - x + 8x\, dx\,dy = 4 \iint_{S_{xy}} 7x + 2\, dx\,dy =$

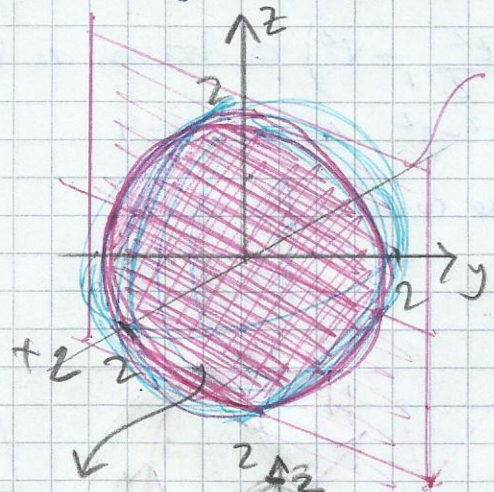
$\overset{C.V.}{=} 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{r}_{Jac} \left(\overbrace{7(r\cos(t) + 1)}^{7r\cos(t)+7} + 2\right) dr\,dt = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{7r^2\cos(t)}_{0} + 9r\, dr\,dt =$

$= 36 \cdot \underbrace{\boxed{\iint_{S_{rt}} r\, dr\,dt}}_{\text{Area } S_{xy}} \overset{\pi}{=} 36 \cdot \pi$

$$\boxed{\oint_C \bar{f}\, d\bar{l} = 36\pi}$$

NOTA

② Determinar el área de la porción del plano $y = 2x$ limitada por $x^2+y^2+z^2 \leq 4$



$\longrightarrow$ es la intersección entre una esfera y un plano que pasa por el centro

$\Rightarrow A = \pi \cdot r^2 = 4\pi$

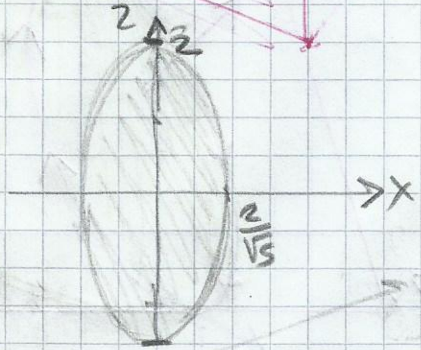
$\boxed{A = 4\pi}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \end{cases}$$

$x^2 + (2x)^2 + z^2 \leq 4$

$5x^2 + z^2 \leq 4 \rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{\frac{4}{5}} + \dfrac{z^2}{4} \leq 1}$

$\hookrightarrow \boxed{a = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \quad b = 2}$



$\boxed{N}$

$\downarrow$

$y = 2x$

$N = \dfrac{\nabla G}{|G'y|}$

$N = (2, -1, 0)$

$\|N\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = \|N\|$

$A_S = \iint_S ds = \iint_{S_{xz}} \|N\|\, dx\,dz = \iint_{S_{xz}} \sqrt{5}\, dx\,dz =$

$\boxed{\text{Área elipse: } ab\pi}$

$= \sqrt{5} \underbrace{\iint_{S_{xz}} dx\,dz}_{\text{área elipse}} = \cancel{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}\, 2\pi = 4\pi$

$\boxed{A = 4\pi}$

NOTA

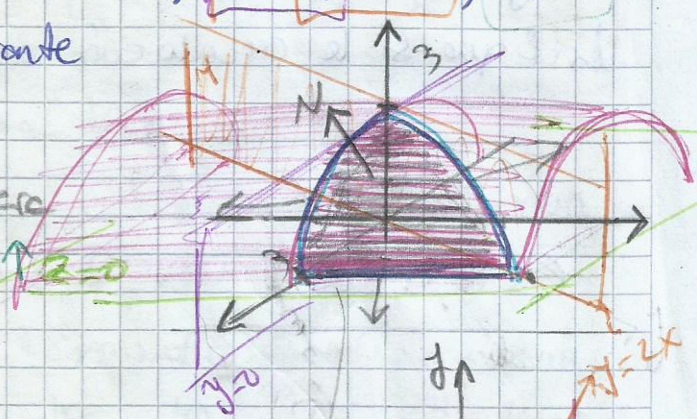
AM2	2° parcial Prof Hernandez	HOJA N° 2/3 FECHA 19-11-24

③ Calcular el flujo de $\bar{F}(\bar{x}) = (xy\,;\ xy^2,\ -2xyz)$ a través de la sup. frontera del sólido: $x^2+z^2 \leq 9$, $\boxed{0 \leq y \leq 2x}$, $z \geq 0$

Indicar si el flujo es saliente o entrante

Sup. frontera $\Rightarrow$ T. Gauss

W es el sólido y S la sup frontera



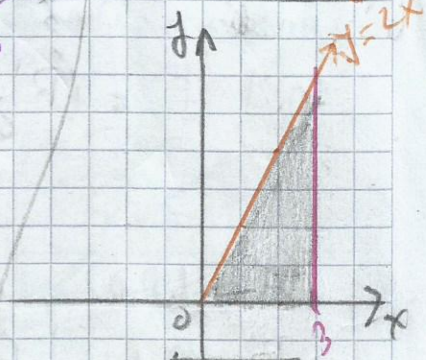
$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, dvol =$$

$\bar{F}(PQR)$

$$\hookrightarrow \operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z =$$

$$= y + 2xy - 2xy = \boxed{y = \operatorname{div}(\bar{F})}$$

$$\oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W y\, dvol = \int_0^3 \int_0^{2x} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\, dz\,dy\,dx =$$



$z = \sqrt{9-x^2}$

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2} \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2x} y\sqrt{9-x^2}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2x} dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\, \frac{(2x)^2}{2}\, dx = 2\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\, dx = \boxed{\frac{81}{8}\pi = \oiint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma}}$$

tabla ? (247)

es $>0 \Rightarrow$ flujo saliente

$P \quad Q \quad R$

(4) Calcular la circ. del campo $\bar{F}_{(x,y,z)} = (2x; z; y-2z)$ a lo largo de la curva dada por las intersecciones de las superficies

$C: \boxed{x^2+y^2=1 \quad \wedge \quad z+x=1}$ desde $(1,0,0)$ hasta $(0,1,1)$

Verifique si la circulación es independiente del camino

$\equiv$ verificar si $\bar{F}$ es conservativo

$\text{dom}(\bar{F}) = \mathbb{R}^3$ ✓

$\bar{F} = (P, Q, R)$, P, Q, R son polinomios $\Rightarrow \bar{F} \in C^1$ ✓

Analizo si es irrotacional ($\Rightarrow$ matriz jac. simétrica)

$\text{rot}(\bar{F}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (1-1,\ 0-0,\ 0-0)$

$\text{rot}(\bar{F}) = \bar{0}$ ✓ es campo conservativo

$\rightarrow$ independencia del camino

$A = (1,0,0)$ inicio

$B = (0,1,1)$ fin

$\rightarrow T: \bar{\gamma}_{(t)} = t(B-A) + A$

$$\boxed{T: \bar{\gamma}_{(t)} = t(-1,1,1) + (1,0,0) \quad t \in [0,1]}$$

$\searrow \bar{\gamma}_{(t)} = (\underbrace{1-t}_{x}, \underbrace{t}_{y}, \underbrace{t}_{z})$

$\bar{F}$ campo cons.

$\bar{\gamma}'_{(t)} = (-1,1,1)$

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{l} \overset{\downarrow}{=} \int_T \bar{F}\, d\bar{l} = \int_A^B \bar{F}(\bar{\gamma}_{(t)})\, \bar{\gamma}'_{(t)}\, dt = \int_0^1 (2\overbrace{(1-t)}^{x}, \overbrace{t}^{z}, \overbrace{t-2t}^{y-2z})(-1,1,1)\, dt =$$

$$= \int_0^1 -2(1-t) + \cancel{t} + \cancel{t} - 2t\, dt = -2\int_0^1 1-t\, dt =$$

$$= -2 \cdot \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\boxed{\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = -1}$$

NOTA

⑤ a) Definir líneas de campo para un campo vectorial

$C: \bar{\gamma}(t)$ es línea de campo si $\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$

b) Hallar la línea de campo de $\bar{f}(x,y) = (2; x)$ que pase por $(2;5)$

$\bar{f}(x,y) = (2;x) \longrightarrow$ l.c: $\dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{x}$

$\int \dfrac{x}{2}\,dx = \int dy$

$\boxed{\dfrac{x^2}{4} + c = y}$

Pasa por $(2;5) \to x=2$, $y=5 \longrightarrow \dfrac{2^2}{4} + c = 5 \to c = 4$

$\boxed{y = \dfrac{x^2}{4} + 4}$

⑥ a) Enunciar el teorema de Green indicando hipótesis

hipótesis: Sean: C una curva cerrada y suave a trozos, orientada positivam.
D una región compacta de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera es C
$\bar{f} = (P, Q) \in C^1$

$\Longrightarrow \oint_{C^+} \bar{f}\,d\bar{\gamma} = \iint_D Q'_x - P'_y \,dx\,dy$

b) Si $\bar{f}(x,y) = (\overset{P}{2y}; \overset{Q}{x+y})$, donde $\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{g} = -6$ determine el área del recinto plano D que tiene como curva frontera a C

$\oint_{C^+} \bar{f}\,d\bar{g} = \iint_D Q'_x - P'_y \,dx\,dy \overset{\text{x enunciado}}{=} -6 =$

$= \iint_D \overbrace{1-2}^{-1} \,dx\,dy = - \boxed{\iint_D dx\,dy}$ Área de D

$- \iint_D dx\,dy = -6$

$\Rightarrow \boxed{A_D = 6}$

NOTA